

SZÁMTANI KÖZÉP, MÉRTANI KÖZÉP; SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KÖZTI EGYENLŐTLENSÉG; VÁLTOZÁSOK 2.

ELMÉLET

Átlag vagy más szóval **számtani közép**

Adott n darab valós szám: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ezen számok **átlagát** vagy más szóval **számtani közepét** megkapjuk, ha az összeget osztjuk n -nel, vagyis a számok darabszámával: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Ha az adatok gyakorisága ismert, akkor egyszerűbbé tehetjük a számolást: a számok összegét úgy számoljuk ki, hogy az adatokat megszorozzuk a gyakoriságukkal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ekkor azt mondjuk, hogy **súlyozott számtani közepet** számoltunk.

ELMÉLET

1. Két valós szám **számtani közepe**

Definíció: Ha a és b valós szám, akkor az $\frac{a+b}{2}$ számot a és b **számtani közepének** nevezzük.

2. Két pozitív valós szám **mértani közepe**

Pozitív számok esetén definiáljuk a számok mértani közepét is.

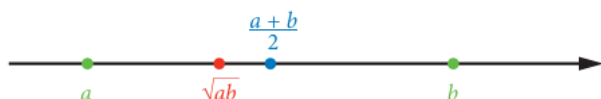
Definíció: Ha az a és b pozitív valós szám, akkor a $\sqrt{a \cdot b}$ számot a és b **mértani közepének** nevezzük.

3. Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség

Tétel: Ha a és b pozitív valós számok, akkor számtani közepük nagyobb vagy egyenlő, mint mértani közepük. Számtani és mértani közepük akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b$.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \text{ pozitív valós számok})$$

- Ha $a = b$, akkor a és b számtani és mértani közepe egyenlő $\left(\frac{a+a}{2} = a \text{ és } \sqrt{a \cdot a} = a\right)$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani és mértani közepe egyenlő, akkor maguk a számok is egyenlők.
- Ha $a \neq b$, akkor a és b számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani közepe nagyobb a mértani közepükénél, akkor a két szám nem egyenlő.



Például:

a 8 és a 98 számtani közepe: $(8 + 98) : 2 = 106 : 2 = 53$, a mértani közepük: $\sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{784} = 28$.

Látjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértani közepénél: $53 > 28$.



Készítsd el a füzetedben és töltsd ki a táblázatot pozitív egész számokkal!

a	b	a és b számtani közepe	a és b mértani közepe
96	150		
375			225
	8	68	
50			50
		10	6
		109	60

a	b	Számtani közép (A)	Mértani közép (G)
96	150	123	120
375	135	255	225
128	8	68	32
50	50	50	50
18	2	10	6
200	18	109	60

1. sor: $a = 96, b = 150$

- Számítási: $\frac{96+150}{2} = \frac{246}{2} = 123$
- Mértani: $\sqrt{96 \cdot 150} = \sqrt{14400} = 120$

2. sor: $a = 375, G = 225$

- A mértani középéből indulunk ki: $225 = \sqrt{375 \cdot b}$, tehát $225^2 = 375 \cdot b$.
- $50625 = 375 \cdot b \Rightarrow b = \frac{50625}{375} = 135$
- Számítási: $\frac{375+135}{2} = \frac{510}{2} = 255$

3. sor: $b = 8, A = 68$

- A számtani középéből: $68 = \frac{a+8}{2}$, tehát $136 = a + 8 \Rightarrow a = 128$
- Mértani: $\sqrt{128 \cdot 8} = \sqrt{1024} = 32$

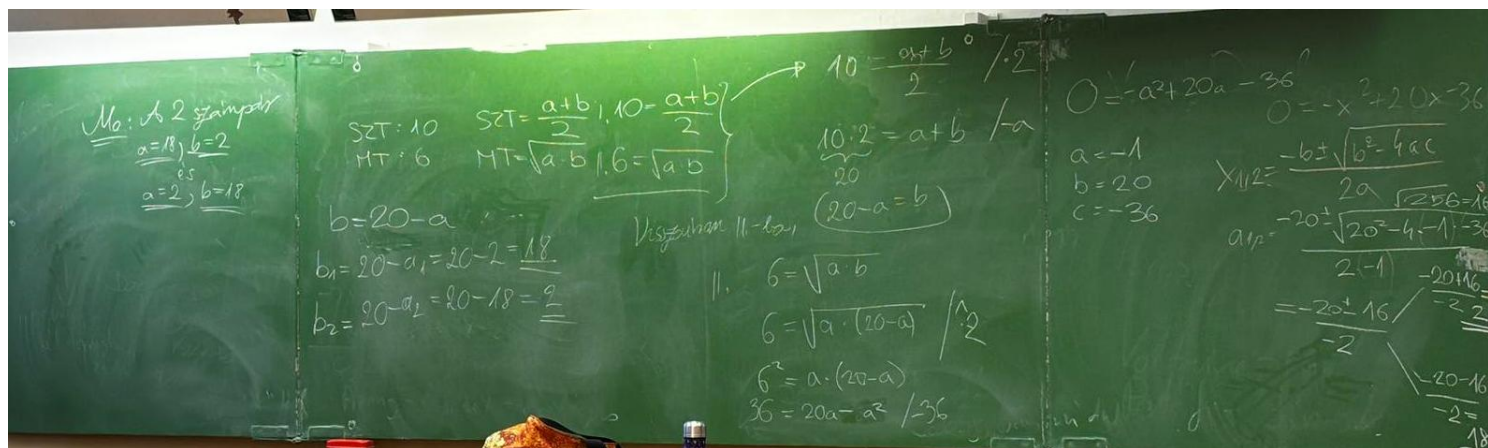
4. sor: $a = 50, G = 50$

- Ha a számtani és mértani közép megegyezik (vagy itt a mértani közép egyenlő az egyik számmal), akkor a két szám azonos: $b = 50$.
- Számítási: $\frac{50+50}{2} = 50$

5. sor: $A = 10, G = 6$

Itt egy egyenletrendszer kell megoldanunk: $a + b = 20$ és $a \cdot b = 36$.

- Melyik az a két szám, aminek az összege 20 és a szorzata 36? Ez a 18 és a 2.
- $a = 18, b = 2$ (vagy fordítva).



6. sor: $A = 109, G = 60$

Hasonlóan: $a + b = 218$ és $a \cdot b = 3600$.

- A másodfokú egyenlet megoldásával ($x^2 - 218x + 3600 = 0$):
- $a = 200, b = 18$ (vagy fordítva).

$b = 218 - a$
 $b_1 = 218 - a_1 = 218 - 200 = 18$
 $b_2 = 218 - a_2 = 218 - 18 = 200$

U_2 : A 2 különböző számjegyű
 $a = 200, b_1 = 18$
 $a_2 = 18, b_2 = 200$

$SZT = 109$
 $MT = 60$

$SZT = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1. 109 = \frac{a+b}{2} \\ 2. 60 = \sqrt{a \cdot b} \end{cases}$

$MT = \sqrt{a \cdot b}$

$a^2 - 218a + 3600 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-218) \pm \sqrt{(-218)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3600}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{218 \pm \sqrt{47524 - 14400}}{2}$

$= \frac{218 \pm \sqrt{33124}}{2} = \frac{218 \pm 182}{2}$

$a_1 = 200$
 $a_2 = 18$

2 10 millió Ft-os tőkénk az első évben 1,5 millió Ft-tal, a második évben 3,5 millió Ft-tal nőtt. Átlagosan mennyit nőtt a tőkénk évente?

ÁTLAG = SZÁMTANI KÖZÉP

$$\frac{1,5 + 3,5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

2,5 millió forint volt az átlagos tőkenövekedés évente.

1. Átlagos növekedés forintban (Számítási közép)

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy fix összeggel számolva átlagosan hány forintot kerestünk évente, akkor a számítási közepet használjuk:

- **1. év:** +1,5 millió Ft
- **2. év:** +3,5 millió Ft
- **Összesen:** 5 millió Ft növekedés két év alatt.

$$\text{Átlagos éves növekedés} = \frac{1,5 + 3,5}{2} = 2,5 \text{ millió Ft/év}$$

2. Átlagos éves hozam százalékban (Mértani közép)

A befektetéseknél általában a **hozam (kamatos kamat)** számít. Itt a mértani közepet kell használnunk, mert a második évben már az első évi nyereség is "dolgozik".

- **Kezdőtőke:** 10 millió Ft
- **1. év végén:** 11,5 millió Ft (ez 1,15-szörös szorzó, azaz **15%** növekedés)
- **2. év végén:** 11,5 + 3,5 = 15 millió Ft (ez a 11,5-höz képest kb. **30,4%** növekedés)

A teljes növekedés mértéke a két év alatt: $\frac{15}{10} = 1,5$ (azaz 50% összesen).

Az átlagos éves szorzót (q) a mértani középpel kapjuk meg:

$$q = \sqrt{1,15 \cdot 1,3043...} = \sqrt{1,5} \approx 1,2247$$

Ez azt jelenti, hogy a tőkénk **átlagosan évi 22,47%-kal** nőtt.

3 Egy kerékpártúrán az első napon 62 km-t tettek meg. A második napon 15%-kal többet, mint az első napon. A harmadik napon 15%-kal kevesebbet, mint a második napon. A negyedik napon 14 km-rel többet, mint a harmadik napon. Az ötödik napon 14 km-rel kevesebbet, mint a negyedik napon.

a) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	összesen
62 km					

b) A második napon 15%-kal növelték, majd a következőn 15%-kal csökkentették a távot. Több vagy kevesebb a napi táv a harmadik napon, mint az elsőn? Miért?

c) A negyedik napon 14 km-rel növelték, majd az ötödik napon 14 km-rel csökkentették a napi távot. Több vagy kevesebb a napi táv az ötödik napon, mint a harmadikon? Miért?

d) Mennyit tekertek átlagosan egy nap alatt?

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	Összesen
62 km	71,3 km	60,605 km	74,605 km	60,605 km	329,115 km

a) A táblázat kitöltése

Számoljuk ki sorban az egyes napok teljesítményét az adatok alapján:

- 1. nap: 62 km** (megadott adat).
- 2. nap:** Az első napnál 15%-kal több.
 - $62 \cdot 1,15 = 71,3$ km
- 3. nap:** A második napnál 15%-kal kevesebb.
 - $71,3 \cdot 0,85 = 60,605$ km
- 4. nap:** A harmadik napnál 14 km-rel több.
 - $60,605 + 14 = 74,605$ km
- 5. nap:** A negyedik napnál 14 km-rel kevesebb.
 - $74,605 - 14 = 60,605$ km

Összesen: $62 + 71,3 + 60,605 + 74,605 + 60,605 = 329,115$ km

b) Több vagy kevesebb a harmadik napon, mint az elsőn? Miért?

A harmadik napon **kevesebb** a táv, mint az elsőn.

- **Miért?** Mert bár a százalékos elmozdulás mértéke ugyanaz (15%), az alapok különbözőek. Amikor a második napon növeltük a távot, a 15%-ot a 62 km-re számoltuk. Amikor a harmadik napon csökkentettük, a 15%-ot már a megnövelt értékből (71,3 km) vontuk le. Mivel egy nagyobb számnak a 15%-a több, a csökkenés mértéke abszolút értékben nagyobb volt, mint a növekedésé (9,3 km növekedés vs. 10,695 km csökkenés).

c) Több vagy kevesebb az ötödik napon, mint a harmadikon? Miért?

Az ötödik napon megtett táv **ugyanannyi**, mint a harmadikon.

- **Miért?** Mert itt fix mennyiségről (14 km) van szó, nem százalékról. Ha egy értékhez hozzáadunk egy számot, majd ugyanazt a számot kivonjuk belőle, visszakapjuk az eredeti értéket ($+14 - 14 = 0$).

d) Mennyit tekertek átlagosan egy nap alatt?

Az átlaghoz az összes megtett utat elosztjuk a napok számával (5):

- $\text{Átlag} = \frac{329,115 \text{ km}}{5} = \mathbf{65,823 \text{ km/nap}}$

4  Egy új autó vételára 4,2 millió forint. Az első évben 20%-kal, a második évben újabb 15%-kal csökken az autó értéke.

- a)** Mennyit ér az autó a megvásárlása után egy, illetve két évvel?
- b)** Hány százalékot veszít eredeti értékéből (vételárából) két év alatt az autó?
- c)** A 20% és a 15% számtani közepe 17,5%. Ha mindkét évben 17,5%-ot veszített volna az autó az előző évi értékéből, akkor mennyi lenne két év után az értéke?
- d)** Egy 4,2 millió forintért vásárolt céges autó értékét évente ugyanannyi százalékkal csökkentették. A vétel után 2 évvel az autó értéke 2,856 millió forint. Hány százalékos volt az éves értékcsökkenés?

a) Érték egy, illetve két év után

- **Vételár:** 4 200 000 Ft
- **1. év után:** $4,2 \cdot 0,8 = 3,36$ millió Ft (20%-os csökkenés)
- **2. év után:** $3,36 \cdot 0,85 = 2,856$ millió Ft (újabb 15%-os csökkenés)

b) Százalékos veszteség két év alatt

Az autó értéke 4,2 millióról 2,856 millióra csökkent.

- Veszteség $= 4,2 - 2,856 = 1,344$ millió Ft
- Százalékban $= \frac{1,344}{4,2} = 0,32$, tehát **32%**-ot veszített az értékéből.

c) Számítás 17,5%-os átlagos csökkenéssel

- **1. év után:** $4,2 \cdot 0,825 = 3,465$ millió Ft
- **2. év után:** $3,465 \cdot 0,825 = 2,858625$ millió Ft

(Látható, hogy ez nem egyezik meg a pontos értékkel, mert a százalékos változásoknál nem a számtani közép számít.)

d) Éves azonos százalékos csökkenés

Azt keressük, hogy milyen q szorzóval kapjuk meg két év alatt a 2,856 milliós értéket: $4,2 \cdot q^2 = 2,856$.

- $q^2 = \frac{2,856}{4,2} = 0,68$
- $q = \sqrt{0,68} \approx 0,8246$
Ez $1 - 0,8246 = 0,1754$, tehát az éves értékcsökkenés kb. **17,54%** volt.